**Wronskiano**

Notas para los cursos 21 y 22 (J.L. Mancilla Aguilar)

El objeto de esta nota es presentar una condición suficiente para la independencia lineal de conjuntos de funciones, simple de verificar.

Dado un intervalo $I$ de $\mathbb{R}$, recordamos que $\mathcal{C}(I)$ denota al espacio vectorial compuesto por todas las funciones $f : I \to \mathbb{R}$ que son continuas en $I$ y que $\mathcal{C}^k(I)$, con $k \in \mathbb{N}$, denota al subespacio de $\mathcal{C}(I)$ formado por las funciones $f : I \to \mathbb{R}$ que son $k$-veces derivables con continuidad en $I$ (cuando el intervalo $I$ contiene a alguno de sus extremos, se consideran en ese punto las derivadas laterales que correspondan). Recordemos que el conjunto de funciones continuas $\{f_1, \ldots, f_n\}$, con $f_i \in \mathcal{C}(I)$, $i = 1, \ldots, n$, es linealmente independiente si la única combinación lineal de las $f_i$ que verifica la condición

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_n f_n = 0 \tag{1}$$

es la trivial, es decir, $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$.

Observamos que (1) es equivalente a la condición

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0 \quad \forall x \in I.$$

Dado un conjunto de funciones $\{f_1, \ldots, f_n\}$, con $f_i \in \mathcal{C}^{(n-1)}(I)$ para $i = 1, \ldots, n$ (observe que la cantidad de derivadas continuas que se supone tiene cada $f_i$ es una menos que la cantidad de funciones que tiene el conjunto considerado), se define el wronskiano de $\{f_1, \ldots, f_n\}$, mediante

$$W(f_1, \ldots, f_n)(x) = \det \left( \begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix} \right), \qquad x \in I. \tag{2}$$

Por ejemplo, si consideramos las funciones $f_1(x) = x$, $f_2(x) = e^x$ y $f_3(x) = e^{-x}$, tenemos que

$$W(f_1, f_2, f_3)(x) = \det \left( \begin{bmatrix} x & e^x & e^{-x} \\ 1 & e^x & -e^{-x} \\ 0 & e^x & e^{-x} \end{bmatrix} \right) = 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

El siguiente resultado da una condición suficiente para la independencia lineal de un conjunto de funciones en términos del wronskiano de ellas.

**Teorema.** Supongamos que $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ es un conjunto de funciones pertenecientes a $\mathcal{C}^{n-1}(I)$ tal que para algún $x_0 \in I$, $W(f_1, \ldots, f_n)(x_0) \neq 0$.

Entonces $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ es linealmente independiente.

**Demostración.** Supongamos que para ciertos números reales $c_1, \ldots, c_n$,

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0 \quad \forall x \in I.$$

Derivando sucesivamente ambos miembros de la igualdad resulta que para todo $x \in I$:

$$\begin{array}{rcl} c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x) + \cdots + c_n f_n'(x) & = & 0 \\ c_1 f_1''(x) + c_2 f_2''(x) + \cdots + c_n f_n''(x) & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_1 f_1^{(n-1)}(x) + c_2 f_2^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n f_n^{(n-1)}(x) & = & 0 \end{array}$$

Lo anterior puede expresarse matricialmente:

$$\begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \forall x \in I.$$

Entonces, en particular, tomando $x = x_0$ obtenemos la igualdad

$$\begin{bmatrix} f_1(x_0) & f_2(x_0) & \cdots & f_n(x_0) \\ f_1'(x_0) & f_2'(x_0) & \cdots & f_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x_0) & f_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Como el determinante de la matriz cuadrada que aparece en el lado izquierdo de la igualdad es el wronskiano de $f_1, \ldots, f_n$ evaluado en $x_0$, y suponemos que éste no es nulo, tenemos que tal matriz es inversible y que por lo tanto $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$. Luego $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ es l.i., que es lo que queríamos probar.

Del Teorema recién demostrado se deduce el siguiente

**Corolario.** Si $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$, con $f_i \in \mathcal{C}^{(n-1)}(I)$ para $i = 1, \ldots, n$, es un conjunto linealmente dependiente entonces necesariamente

$$W(f_1, \ldots, f_n)(x) = 0 \quad \forall x \in I.$$

En resumen, si el wronskiano de un conjunto de funciones cuyo dominio es el intervalo $I$ es distinto de cero en algún punto $x_0 \in I$, el conjunto es l.i.; si el conjunto es l.d. entonces el wronskiano se anula en todo punto $x \in I$.

**Ejemplos.**

1. Las funciones $f_1(x) = x$, $f_2(x) = e^x$ y $f_3(x) = e^{-x}$ son l.i. en cualquier intervalo $I$ de la recta que contenga más de un punto. En efecto, $W(f_1, f_2, f_3)(x) = 2x$, que es diferente de cero en cualquier punto de $I$ distinto de cero.

2. Las funciones $f_1(x) = e^x$ y $f_2(x) = e^{x+1}$ son linealmente dependientes en cualquier intervalo $I$, pues
$$-ef_1(x) + f_2(x) = 0 \qquad \forall x \in I.$$
Por otra parte,
$$W(f_1, f_2)(x) = e^x e^{x+1} - e^x e^{x+1} = 0 \quad \forall x \in I,$$
como indica el corolario del teorema.

La pregunta natural que uno puede formularse es si la condición

$$W(f_1, \dots, f_n)(x) = 0 \qquad \forall x \in I,$$

implica que $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ sea necesariamente linealmente dependiente. La respuesta en este caso es negativa, es decir, existen conjuntos de funciones $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ que son linealmente independientes y que, sin embargo, su wronskiano es nulo en $I$.

**Ejemplo.** Consideremos $I = [-1, 1]$, $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = x|x|$. Un simple cálculo muestra que $f_2'(x) = -2x$ si $x < 0$, $f_2'(0) = 0$ y que $f_2'(x) = 2x$ si $x > 0$. Por lo tanto $f_2'$ es continua en $I$. Teniendo en cuenta esto último calculamos $W(f_1, f_2)(x)$ y comprobamos que $W(f_1, f_2)(x) = 0$ para todo $x \in I$.

Por otra parte $\{f_1, f_2\}$ es l.i. en $I$. Para probarlo, supongamos que

$$c_1 x^2 + c_2 x|x| = 0 \qquad \forall x \in I.$$

Entonces, en particular, tomando $x = 1$, obtenemos

$$c_1 1^2 + c_2 1|1| = 0 \Rightarrow c_1 = -c_2,$$

y tomando $x = -1$ resulta

$$c_1(-1)^2 + c_2(-1)|-1| = 0 \Rightarrow c_1 = c_2.$$

Pero entonces $c_1 = c_2 = 0$ y $\{f_1, f_2\}$ es l.i.

Puede probarse que la condición de anulación del wronskiano implica la dependencia lineal del conjunto de funciones si se cumplen hipótesis adicionales. Un ejemplo de esto es el siguiente resultado:

**Proposición.** Supongamos que $\{f, g\}$ es un conjunto de funciones derivables con continuidad en $I$ y que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

Entonces, si $W(f, g)(x) = 0$ para todo $x \in I$, $\{f, g\}$ es linealmente dependiente.

**Demostración.** Consideremos la función $h = \frac{g}{f}$, la cual es derivable con continuidad en todo punto de $I$ porque $f$ nunca se anula. Dado que

$$h' = \left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{g'f - gf'}{f^2} = \frac{W(f, g)}{f^2} = 0,$$

tenemos que $h$ es constante en $I$ y, por lo tanto, $g$ es un múltiplo de $f$, lo cual implica que $\{f, g\}$ es l.d.